

# 剩余消费比率、风险溢酬和经济波动

## ——基于外部习惯的连续时间一般均衡模型

陈 蓉<sup>a, b</sup>, 白 林<sup>a</sup>, 郑振龙<sup>b</sup>

(厦门大学 a. 经济学院; b. 管理学院, 福建 厦门 361005)

**摘 要:** 2008 年的金融危机再次引发了人们对现有宏观经济模型的反思, 大量文献试图将金融部门纳入宏观模型。近年来, 连续时间框架下的金融中介模型具有高度非线性、内生波动、时变风险溢酬和稳态随机等特点。这不仅使之在刻画金融市场与实体经济的互动关系和拟合经济现实等方面更具优势, 同时也为融合宏观经济与资产定价提供了新的思路。以剩余消费比率作为度量投资者风险容忍度的状态变量, 在连续时间下将基于消费的传统资产定价模型推广到了包含宏观变量的一般均衡模型, 并利用机器学习求解了该模型。在边际消费倾向递减的假设下, 谨慎性储蓄使得家庭消费在状态较差时对负向冲击更敏感, 从而导致逆周期的消费波动、低风险容忍度和高风险溢酬。结果表明, 该模型除了可以刻画消费波动、谨慎性储蓄和风险溢酬与状态变量剩余消费比率的非线性关系外, 还能较好地匹配负向冲击发生后风险溢酬、无风险利率、夏普比率等资产价格变量和投资、经济产出等宏观经济变量的变化。

**关键词:** 剩余消费比率; 风险溢酬; 经济波动; 机器学习

**中图分类号:** F015; F832.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 0438-0460(2019)04-0018-11

## 一、引言

2008 年的金融危机再次引发了人们对现有宏观经济模型的反思, 大量文献试图将金融部门纳入宏观模型, 以更好地刻画金融市场对宏观经济的重要影响。<sup>[1]</sup> 同时, Cochrane 认为应该将资产定价与宏观经济这两个领域进一步融合, 以更好地研究资产价格与经济波动之间的关系。<sup>[2]</sup> 近年来连续时间框架下的金融中介模型具有高度非线性、内生波动、时变风险溢酬和稳态随机等特点。<sup>[3]</sup> 这不仅使之在刻画金融市场与实体经济的互动关系和拟合经济现实等方面更具优势, 同时也为融合宏观经济与资产定价提供了新的思路。然而, 这类文献大多聚焦于金融中介, 尤其以金融机构的财富比例作为基本的状态变量。我们能否沿着 Cochrane<sup>[4]</sup> 的思路, 在连续时间框架下, 将基于消费的传统资产定价模型推广到包含宏观变量的一般均衡模型, 从而融合资产定价与宏观经济这两个长期割裂的领域呢?<sup>①</sup>

收稿日期: 2019-01-13

基金项目: 国家自然科学基金面上项目“波动率微笑: 隐含信息与动态建模”(71471155); 国家自然科学基金面上项目“衍生品市场隐含的投资者情绪: 提取、分析与应用”(71871190); 国家自然科学基金重大项目“中国制度与文化背景下公司财务政策的理论与实践研究”(71790601)

作者简介: 陈蓉, 女, 福建福清人, 厦门大学经济学院/管理学院教授、博士生导师, 经济学博士; 白林, 男, 重庆人, 厦门大学经济学院博士研究生; 郑振龙, 男, 福建平潭人, 厦门大学管理学院教授、博士生导师, 经济学博士。

① 关于资产定价与宏观经济割裂的详述, 见 Brunnermeier, M. K., Sannikov, Y., “Macro, Money and Finance: A Continuous Time Approach”, *Handbook of Macroeconomics*, 2016。

基于此,本文构建了基于外部习惯的连续时间一般均衡模型,并以剩余消费比率(surplus consumption ratio)作为度量投资者风险容忍度的状态变量,研究了消费波动、谨慎性储蓄、风险溢价、夏普比率等资产价格变量与该状态变量的非线性关系,以及外生冲击通过状态变量如何影响资产价格变量和宏观经济变量随时间的变化。选择外部习惯模型的原因在于Cochrane认为它除了与其他效用模型表现一样好外,在数据可获得性方面也颇具优势。<sup>[5]</sup> 剩余消费比率表示家庭消费与全社会消费习惯之差占家庭消费的比例,该数值越大则表明相对社会平均水平而言家庭消费水平越高,此时家庭所处状态相对越好,反之越差。它之所以能作为衡量投资者风险容忍度的状态变量,原因有二。理论方面,在外部习惯设定下,它不仅是家庭相对风险厌恶系数和随机贴现因子的重要组成元素,而且其包含的消费也是少有的能够沟通宏观经济和资产定价的桥梁。在该设定下,消费波动是内生的,当发生冲击时,消费呈现出非线性变化和逆周期波动。实践方面,剩余消费比率可以被看作是经济波动的代理变量,经济衰退多伴随着家庭消费大幅下降。<sup>[6]</sup>

与现有文献相比,本文的不同和贡献在于将基于消费的传统资产定价模型推广到包含宏观变量的连续时间和一般均衡框架,并利用机器学习求解了该模型。具体表现在:首先,本文在基于消费的资产定价模型中纳入生产、投资等宏观经济要素,构建了连续时间随机一般均衡模型。该模型刻画的经济金融变量与剩余消费比率之间的非线性关系,是现有宏观模型所缺乏的。其次,本文构建的模型可以看作是对Campbell和Cochrane<sup>[7]</sup>在一般均衡意义上的推广。这方面与本文最接近的是Chen<sup>[8]</sup>,不同的是它是在离散时间构建和求解了模型,且重点关注资产价格与消费波动风险之间的关系。此外,Chen<sup>[9]</sup>的模型同Brunnermeier和Sannikov<sup>[10]</sup>、Silva<sup>[11]</sup>、Tella<sup>[12]</sup>等一样缺乏现实数据的接口,本文中利用机器学习求解可以方便地引入真实数据估计模型参数。最后,国内目前还未发现类似融合资产定价和宏观经济并利用机器学习求解的连续时间随机一般均衡模型的文献,本文可能是一次有益的尝试。研究发现:该模型除了可以合理地刻画消费波动、谨慎性储蓄和风险溢价的逆周期性、非线性和时变特征外,还能较好地描述状态变量遭受负向冲击后风险溢价、风险资产收益波动率、无风险利率等资产价格变量和投资率、经济产出等宏观经济变量随时间的变化。在该模型中,负面冲击会导致产出永久地偏离其随机稳态。这为金融危机后工业化国家产出持续下降的经济现实提供了模型解释,也为产业结构调整 and 升级背景下研究中国金融部门与实体经济的互动关系提供了一定的模型参考。

## 二、模型构建

本文在连续时间下构建融合资产定价和宏观经济的随机一般均衡模型,模型构建主要借鉴了Campbell和Cochrane<sup>[13]</sup>、Chen<sup>[14]</sup>的同质家庭和效用函数假设以及Brunnermeier和Sannikov<sup>[15]</sup>的连续时间框架。在我们的模型中,存在同质的家庭和厂商,家庭有外部习惯效用函数且没有劳动收入,金融市场完全,且所有家庭都能够在金融市场自由交易风险资产。

### (一) 家庭偏好

根据Campbell和Cochrane<sup>[16]</sup>的外部习惯模型,单个家庭的效用函数如下:

$$U(c_t - H_t) = \frac{(c_t - H_t)^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} \quad (1)$$

(1)式中 $c_t$ 是单个家庭的消费, $H_t$ 是由所有家庭确定的消费习惯, $\gamma$ 为一般CRRA效用函数中的风险厌恶系数。在连续时间假设下,单个家庭通过选择消费和资产组合达到一生中的最大化效用:

$$\max E \left[ \int_0^{\infty} e^{-\rho t} U(c_t - H_t) dt \right] \quad (2)$$

(2) 式中  $\rho$  为时间贴现参数。与已有外部习惯模型一样,我们定义剩余消费比率  $S_t$  来刻画单个家庭消费  $c_t$  与外部习惯  $H_t$  之间的关系,具体定义如下:

$$S_t = \frac{c_t - H_t}{c_t} \quad (3)$$

结合效用函数(1)式和剩余消费比率表达式(3)式,单个家庭的相对风险厌恶系数可表示为:

$$\eta_t = - \frac{c_t U''(c_t)}{U'(c_t)} = \frac{\gamma}{S_t} \quad (4)$$

可知,当剩余消费比率  $S_t$  越小时,家庭相对风险厌恶系数  $\eta_t$  越高。因假设金融市场完全,我们的模型中存在唯一为正的随机贴现因子。从效用函数(1)式可得连续时间下随机贴现因子  $m_t$  的表达式为:

$$m_t = e^{-\rho t} (c_t S_t)^{-\gamma} \quad (5)$$

根据资产定价理论中的一般设定,随机贴现因子  $m_t$  服从如下伊藤过程:

$$\frac{dm_t}{m_t} = -r_t dt - \xi_t dz_t \quad (6)$$

(6) 式中  $r_t$  为无风险利率(或者其影子),  $\xi_t$  是关于  $z_t$  的风险价格。从(4)式—(6)式可知,剩余消费比率  $S_t$  是家庭相对风险厌恶系数  $\eta_t$  和随机贴现因子  $m_t$  的重要组成元素。当消费下降时,  $S_t$  也会下降,家庭相对风险厌恶系数  $\eta_t$  上升,相应地,所求的风险溢价和预期收益上升。可见,我们模型中以剩余消费比率  $S_t$  作为衡量家庭风险容忍度的状态变量是合理的。当  $S_t$  较大时,认为家庭的风险容忍度较强;反之,较弱。

与 Campbell 和 Cochrane<sup>[17]</sup>、Chen<sup>[18]</sup> 等一样,前述单个家庭的外部习惯  $H_t$  受来自整个社会的外生影响。定义整个经济体的剩余消费比率  $\hat{S}_t$ :

$$\hat{S}_t = \frac{C_t - H_t}{C_t} \quad (7)$$

其中  $C_t$  为所有家庭的平均消费。因家庭的同质性,在均衡状态时  $c_t = C_t$ ,  $S_t = \hat{S}_t$ 。故我们可以用代表性家庭的行为代替所有家庭。

参考 Chen<sup>[19]</sup> 和 Duarte<sup>[20]</sup> 等的研究,我们进一步定义  $s_t = \log(S_t)$ , 其微分表达式如下:

$$ds_t = - (1 - \rho_s) (s_t - \bar{s}) dt + \lambda \frac{dc_t}{c_t} \quad (8)$$

(8) 式中  $\rho_s$  为  $s_t$  的自相关系数,反映了  $s_t$  的均值回复速度,  $\bar{s}$  为  $s_t$  的长期均值,  $\lambda$  是  $s_t$  对消费变化敏感性的参数。与 Chen<sup>[21]</sup> 的设定一样,本文中  $\lambda$  为常数,这与 Campbell 和 Cochrane<sup>[22]</sup> 的禀赋模型中  $\lambda$  的设置有所不同。在 Campbell 和 Cochrane<sup>[23]</sup> 的研究中,为了刻画时变的风险溢价,  $\lambda$  是剩余消费比率的减函数,而在一般均衡模型和谨慎性储蓄的假设下, Chen<sup>[24]</sup> 发现即使  $\lambda$  是常数,模型也呈现逆周期的风险溢价。

进一步假设单个家庭消费  $c_t$  满足如下伊藤过程:

$$\frac{dc_t}{c_t} = \mu_t^c dt + \sigma_t^c dz_t \quad (9)$$

那么状态变量剩余消费比率  $s_t$  的随机微分方程可以改写成:

$$ds_t = [- (1 - \rho_s) (s_t - \bar{s}) + \lambda \mu_t^c] dt + \lambda \sigma_t^c dz_t = \mu_t^s dt + \sigma_t^s dz_t \quad (10)$$

其中,

$$\mu_t^s = - (1 - \rho_s) (s_t - \bar{s}) + \lambda \mu_t^c$$

$$\sigma_t^s = \lambda \sigma_t^c$$

从上面两式可知,剩余消费比率  $s_t$  是内生的,它的漂移率  $\mu_t^s$  除了与其自身相关外,还与消费的

漂移率  $\mu_i^c$  相关, 而其波动率  $\sigma_i^c$  与消费的波动率  $\sigma_i^c$  密切相关。

## (二) 生产技术

借鉴现有文献<sup>[25]</sup>, 我们构建了生产技术的相关模型。首先, 假设生产函数如下:

$$Y_t = aK_t \quad (11)$$

在(11)式中  $\mu$  是刻画生产效率的参数,  $Y_t$  和  $K_t$  分别表示经济体中总产出和总生产资本的数量。与 Brunnermeier 和 Sannikov<sup>[26]</sup> 一样, 我们以产出作为计价单位, 并假设其单位价值为 1。

其次, 总生产资本  $K_t$  的积累过程满足如下随机微分方程:

$$\frac{dK_t}{K_t} = (\Phi(i_t) - \delta) dt + \sigma dz_t \quad (12)$$

在(12)式中  $i_t$  是每单位生产资本的投资率 ( $i_t K_t$  为总投资数量),  $\Phi(i_t)$  代表投资调整成本 (investment adjustment costs), 表示将产出转换成生产资本的难易程度, 刻画了生产资本的自然增长率。一般地,  $\Phi(i_t)$  需要满足  $\Phi(0) = 0$ ,  $\Phi'(0) = 1$ ,  $\Phi'(\cdot) > 0$ ,  $\Phi''(\cdot) < 0$ 。本文延续 Brunnermeier 和 Sannikov<sup>[27]</sup> 的做法, 假设  $\Phi(i_t)$  形式如下:

$$\Phi(i_t) = \frac{1}{\varphi} \sqrt{1 + 2\varphi i_t} - 1 \quad (13)$$

(12) 式中的  $\delta, \sigma$  为模型参数, 分别代表生产资本数量的折旧率和波动率。  $z_t$  是用标准布朗运动描述的外生冲击, 该冲击可以被理解为投资边际效率的外生变化或者生产资本未来生产效率的变化, 即暗含着生产企业未来预期现金流的变化。不同于一般宏观经济模型多用生产效率  $a$  引入技术冲击, 本文用生产资本  $K_t$  引入冲击, 这样可以更好地将该冲击与风险资产的收益和波动联系起来, 以便于阐释外生冲击如何向金融市场的传导。

与(12)式中总生产资本数量  $K_t$  对应的是  $k_t$ , 它代表单个家庭所持有的生产资本数量。因本模型中所有家庭同质, 所以  $k_t$  与  $K_t$  的随机微分方程相同:

$$\frac{dk_t}{k_t} = (\Phi(i_t) - \delta) dt + \sigma dz_t \quad (14)$$

## (三) 金融市场

参照 Brunnermeier 和 Sannikov<sup>[28]</sup> 的研究, 所有家庭均能够在市场交易无风险资产和生产资本, 且生产资本是本模型中唯一的风险资产, 其市场价格  $q_t$  服从以下伊藤过程:

$$\frac{dq_t}{q_t} = \mu_t^q dt + \sigma_t^q dz_t \quad (15)$$

(15) 式中  $\mu_t^q, \sigma_t^q$  分别为风险资产价格的漂移率和波动率, 它们均为状态变量  $s_t$  的确定性函数。(15) 式与(14)式中的  $dz_t$  相同, 这意味着生产资产的数量  $k_t$  和市场价格  $q_t$  受到相同风险源的影响。

根据(15)式、(14)式和伊藤引理, 单个家庭风险资产的市场价值  $k_t q_t$  服从以下随机微分方程:

$$\frac{d(k_t q_t)}{k_t q_t} = (\Phi(i_t) - \delta + \mu_t^q + \sigma \sigma_t^q) dt + (\sigma + \sigma_t^q) dz_t \quad (16)$$

由于将生产资本投入产出还有红利  $(a - i_t)/q_t$ , 所以投资风险资产的全部收益为:

$$dR_t^k = \frac{a - i_t}{q_t} dt + (\Phi(i_t) - \delta + \mu_t^q + \sigma \sigma_t^q) dt + (\sigma + \sigma_t^q) dz_t \quad (17)$$

记  $\mu_t^R = \frac{a - i_t}{q_t} + (\Phi(i_t) - \delta + \mu_t^q + \sigma \sigma_t^q)$ ,  $\sigma_t^R = \sigma + \sigma_t^q$ , 则:

$$dR_t^k = \mu_t^R dt + \sigma_t^R dz_t \quad (18)$$

(18) 式中, 投资该风险资产的风险  $\sigma_t^R$  来自两部分:  $\sigma$  表示源自于外生的、与生产资本数量  $k_t$

相关的风险量;  $\sigma_t^q$  表示源于金融市场风险资产价格内生的风险量。

#### (四) 市场出清条件

在同质家庭的假设下,我们可以用单个家庭的选择表征整个经济体的市场均衡条件。首先,市场均衡时,消费品市场出清条件为消费与投资之和等于产出,即:

$$c_t = ak_t - i_t k_t \quad (19)$$

其次,厂商投入生产资本旨在为股东(家庭)带来最大化预期收益,即通过选择投资率  $i_t$  使得  $E[dR_t^k]$  最大化。

最后,在市场完全的假设下,市场均衡时风险资产收益  $R_t^k$  应满足:

$$E[dR_t^k] - r_t dt = -cov\left(\frac{dm_t}{m_t}, dR_t^k\right) \quad (20)$$

将(10)式、(18)式代入(20)式,得到:

$$\mu_t^R - r_t = \xi_t \sigma_t^R \quad (21)$$

以上便是本文在连续时间下构建的随机一般均衡模型。该模型构建时借鉴了连续时间模型和资产定价两方面的已有研究,在 Brunnermeier 和 Sannikov<sup>[29]</sup> 连续框架上,纳入了 Campbell 和 Cochrane<sup>[30]</sup>、Chen<sup>[31]</sup> 的外部习惯模型。不同的是,我们的模型从同质投资者的角度将传统基于消费的资产定价模型纳入他们提出的连续时间模型,而 Brunnermeier 和 Sannikov<sup>[32]</sup> 重在从异质投资者的角度给出连续时间下包含金融部门的宏观分析框架。此外,我们的模型这可以看作是对 Campbell 和 Cochrane<sup>[33]</sup> 在一般均衡方面的推广。

### 三、最优化和模型求解

#### (一) 家庭最优化决策

由于没有劳动收入,且时间  $t \in [0, +\infty]$ ,最大化效用下单个家庭的值函数为:

$$V(w_t, s_t) = \max_{c_t, a_t} E \left[ \int_0^\infty e^{-\rho t} U(c_t - H_t) dt \right] \quad (22)$$

(22) 式中  $w_t$  和  $\alpha_t$  分别表示家庭财富和风险资产占家庭财富的比例。为保证效用最大化,假设理性预期的家庭  $t$  时刻的消费为  $c_t$ ,其将财富投资无风险资产和风险资产的比例分别为  $1 - \alpha_t$  和  $\alpha_t$ ,那么其财富  $w_t$  的随机微分方程如下:

$$\frac{dw_t}{w_t} = [r_t + a_t(\mu_t^R - r_t) - \hat{c}_t] dt + a_t \sigma_t^R dz_t \quad (23)$$

(23) 式中  $\hat{c}_t = c_t/w_t$ 。单个家庭最大化效用的约束条件分别为状态变量剩余消费比率  $s_t$  的表达式(14)和家庭财富  $w_t$  的随机微分方程(23)式。在上述最优化的(22)式中,值函数  $V(w_t, s_t)$  是决策函数  $w_t$  和状态变量  $s_t$  是值函数的自变量  $c_t$  和  $\alpha_t$  是控制变量。为便于表达,令  $X = [w_t, s_t]$ 。

#### 1. HJB 方程

根据(10)式、(22)式和(23)式,我们可以得到该模型的 Bellman 方程如下:

$$V(X) = V(X) + dt \times \max_{c_t, a_t} \left\{ U(c - H) - \rho V(X) + \frac{EdV}{dt}(X, c) \right\} \quad (24)$$

$$\frac{EdV}{dt}(X, c) = \langle \nabla_X V, \mu_X \rangle + \frac{1}{2} tr(\sigma_X' \nabla_X^2 V \sigma_X) \quad (25)$$

(25) 式中,  $\nabla_X V$ ,  $\nabla_X^2 V$  分别表示  $V$  的梯度和海塞矩阵。传统动态最优化中的做法是在(24)式两边同时消去  $V(X)$ ,再令  $dt$  趋向于 0,则得到如下 HJB 方程:

$$0 = \max_{c_t, a_t} \left\{ U(c - H) - \rho V(X) + \frac{EdV}{dt}(X, c) \right\} \quad (26)$$

## 2. 值函数 $V(X)$ 求解

根据最优条件和一阶条件, 再结合剩余消费比率  $s_t$  和财富  $w_t$  的随机微分方程(10)式和(23)式, 我们便可以得到值函数  $V(X)$  关于  $s_t$  和  $w_t$  的偏微分方程:

$$0 = \frac{V_w^{1-\frac{1}{\gamma}} - 1}{1-\gamma} + V_{ww} [\gamma_t + a_t(\mu_t^R - \gamma_t)] - \frac{V_w^{-\frac{1}{\gamma}}}{e^{s_t}} + V_{ss} \mu_t^s + \frac{1}{2} V_{ww} \left[ \frac{(\mu_t^R - \gamma_t)}{V_{ww} \sigma_t^R} + \frac{V_{ws} \lambda \sigma_t^c}{V_{ww}} \right]^2 + \frac{1}{2} V_{ss} \lambda^2 (\sigma_t^c)^2 - V_{ws} \left[ \frac{(\mu_t^R - \gamma_t)}{V_{ww} \sigma_t^R} + \frac{V_{ws} \lambda \sigma_t^c}{V_{ww}} \right] \sigma_t^s \quad (27)$$

该偏微分方程中含有值函数关于财富  $w_t$ 、状态变量  $s_t$  的一阶、二阶导数, 一般求解并不容易。借鉴 Duarte<sup>[34]</sup>的思路, 本文以(24)式中的 HJB 方程作为压缩映射算子, 利用基于 TensorFlow<sup>[35]</sup>和多个相互嵌套的神经网络求解了所构建的模型。相对于传统的解常微分方程<sup>[36]</sup>、投影法<sup>[37]</sup>、有限差分<sup>[38]</sup>等, Mnih 等<sup>[39]</sup>研究显示, 基于机器学习的方法可以有效解决连续时间随机模型面临的“维度诅咒”。这也为纳入实际经济数据提供了可能。与 Duarte<sup>[40]</sup>不同的是, 我们还重点关注了金融市场风险资产价格与状态变量的关系, 所以在求解时比它多嵌套了风险资产价格及其漂移项和波动项的神经网络。

### (二) 最优生产投资

与 Brunnermeier 和 Sannikov<sup>[41]</sup>一样, 本文模型中的生产厂商通过调整投资率  $i_t$  给股东带来最大化预期收益, (17)式显示最大化预期收益  $E[dR_t^k]$  等价于:

$$\max_{i_t} \frac{a - i_t}{q_t} + (\Phi(i_t) - \delta + \mu_t^q + \sigma \sigma_t^q) \quad (28)$$

由一阶条件, 可得:

$$\Phi'(i_t) = 1/q_t \quad (29)$$

(29)式即为 Tobin's q, 即为保证股东预期收益率的最大化, 厂商生产投资与风险资产价格  $q_t$  成正比。根据(3)式和(35)式, 可得到生产资本投资率  $i_t$  与风险资产价格  $q_t$  的关系解析式:

$$i_t = \frac{q_t^2 - 1}{2\varphi} \quad (30)$$

(30)式显示, 厂商投资率与风险资产价格的平方成正比, 该式说明了风险资产价格的变化如何传导至投资和经济产出。Brunnermeier 和 Sannikov<sup>[42]</sup>认为  $i_t$  取负值对应着生产技术非流动性 (technological illiquidity), 即生产资本的边际成本取决于投资与投资缩减之比。将投资率  $i_t$  带入投资的成本调节函数  $\Phi(i_t)$ , 我们便可以得到资产价格  $q_t$  与风险资产收益  $R_t^k$  间的关系。

### (三) 无风险利率和风险价格

由(5)式和伊藤引理, 我们可以进一步推导连续时间下随机贴现因子与状态变量剩余消费比率的关系:  $dm_t = -\rho e^{-\rho t} (c_t S_t)^{-\gamma} dt + e^{-\rho t} (-\gamma) (c_t S_t)^{-\gamma-1} d(c_t S_t) + \frac{1}{2} e^{-\rho t} (-\gamma)$

$$(-\gamma - 1) (c_t S_t)^{-\gamma-2} [d(c_t S_t)]^2$$

也即:

$$\begin{aligned} \frac{dm_t}{m_t} &= -\rho dt - \gamma \frac{d(c_t S_t)}{c_t S_t} + \frac{1}{2} \gamma (\gamma + 1) \left[ \frac{d(c_t S_t)}{c_t S_t} \right]^2 \\ &= -\{\rho - \gamma(1 - \rho s) (s_t - \bar{s}) + \gamma(\lambda + 1) \mu_t^c - \frac{1}{2} \gamma [1 + \gamma(\lambda + 1)^2] (\sigma_t^c)^2\} dt \\ &\quad - \gamma(\lambda + 1) \sigma_t^c dz_t \end{aligned} \quad (31)$$

对比(31)式和(6)式, 我们可以得到无风险利率(或者其影子)  $\gamma_t$  和风险价格  $\xi_t$  的表达式:

$$\gamma_t = \rho + \gamma(\lambda + 1)\mu_t^c - \gamma(1 - \rho_s)(s_t - \bar{s}) - \frac{1}{2}\gamma[1 + \gamma(\lambda + 1)^2](\sigma_t^c)^2 \quad (32)$$

$$\xi_t = \gamma(\lambda + 1)\sigma_t^c \quad (33)$$

按照已有文献<sup>[43]</sup>常规做法,我们将(32)式中包含消费漂移率 $\mu_t^c$ 和剩余消费比率 $s_t$ 的两项之和称为跨期替代效应,将包含 $(\sigma_t^c)^2$ 的最后一项称为谨慎性储蓄。当处于不好的状态时,家庭消费和剩余消费比率预期会上升,此时跨期替代较大,这会促使无风险利率 $\gamma_t$ 上升。同时,家庭处于不好状态时,由于边际消费倾向递减,消费波动率 $\sigma_t^c$ 上升,随之而来的谨慎性储蓄上升会压低无风险利率 $\gamma_t$ 。与一般的消费习惯模不同的是,(32)式的跨期替代效应中多了关于剩余消费比率 $s_t$ 与其长期均值 $\bar{s}$ 之差的一项,当家庭剩余消费比率 $s_t$ 大于(小于)其长期均值 $\bar{s}$ 时,无风险利率会下降(上升)。表明无风险利率除了与家庭主观贴现率、消费变化的漂移率和波动率有关外,还与剩余消费比率偏离长期均值的程度及其对消费波动的敏感性密切相关。

利用市场出清条件、最优条件、无风险利率和伊藤引理等,我们可以训练得到消费 $c_t$ 及其漂移项 $\mu_t^c$ 、波动项 $\sigma_t^c$ ,风险资产价格 $q_t$ 及其漂移项 $\mu_t^q$ 、波动项 $\sigma_t^q$ 关于状态变量剩余消费比率 $s_t$ 和模型待估参数的神经网络。再结合(10)式和(23)式得到财富 $w_t$ 和状态变量 $s_t$ 的漂移项和波动项,这样每一次值函数训练时都会更新(24)式中HJB算子,最终通过训练7个相互嵌套的神经网络求解该模型。

## 四、模型结果

### (一) 参数估计

参考Norets<sup>[44]</sup>和Duarte<sup>[45]</sup>的研究,训练得到值函数、消费、消费的漂移项和波动项、资产价格、资产价格的漂移项和波动项的神经网络之后,我们进一步利用模拟矩估计(Simulated Method of Moments)<sup>[46]</sup>估计模型参数。本文模型中估计的参数有边际生产率 $a$ ,生产资本折旧率 $\delta$ ,外生冲击,生产资本产能波动率 $\sigma$ 和剩余消费比率持续性参数 $\rho_s$ 。剩下的参数如成本调整参数 $\varphi$ ,时间偏好 $\rho$ ,风险厌恶系数 $\gamma$ ,剩余消费比率长期均值 $\bar{s}$ 和外部习惯强度 $\lambda$ 等参考已有文献和模型特点确定。参考Brunnermeier和Sannikov<sup>[47]</sup>成本调整参数 $\varphi$ 取值为2.0,与Chen<sup>[48]</sup>、Duarte<sup>[49]</sup>一样,时间偏好 $\rho$ 和风险厌恶系数 $\gamma$ 的取值分别为0.04和2.0,根据模型实际数据特点剩余消费比率长期均值 $\bar{s}$ 和外部习惯强度 $\lambda$ 分别取-2.5和1.5<sup>①</sup>。

模拟矩估计中涉及的真实经济变量有:消费增长率均值 $\mu^c$ 、无风险利率的均值 $r_f$ 、超额收益的均值 $R^e$ 、风险资产收益的标准差 $\sigma^R$ 。令 $\beta = (a \ \delta \ \sigma \ \rho_s)$ 表示模型中4个待估计参数组成的向量, $\hat{M} = (\overline{\sigma^c} \ \overline{r_f} \ \overline{R^e} \ \overline{\sigma^R})$ 表示实际数据计算的矩, $M(\beta)$ 是由模型模拟得到的矩,则 $\beta$ 的最优估计如下所示:

$$B^* = \arg \min_{\beta} (\hat{M} - M(\beta))' W (\hat{M} - M(\beta)) \quad (34)$$

(34)式中 $W$ 表示模拟矩估计中使用的权重矩阵。

表1展示了该宏观金融模型参数模拟矩估计的结果。易知,这些参数的估计值均满足模型设

① Chen、Duarter的研究中剩余消费比率长期均值 $\bar{s}$ 分别为-2.65和-2.86,外部习惯强度 $\lambda$ 取值分别为13.28和6.25,详见Chen, Andrew Y., "External Habit in a Production Economy: A Model of Asset Prices and Consumption Volatility Risk", *The Review of Financial Studies* 2017, 30, pp. 2890 - 2932; Duarte V., "Sectoral Reallocation and Endogenous Risk - Aversion: Solving Macro-Finance Models with Machine Learning", Unpublished Working paper 2018。在本文研究过程中,我们用国内实际数据和模拟矩估计得到的剩余消费比率长期均值 $\bar{s}$ 和外部习惯强度 $\lambda$ 分别约为-2.5和1.5,而且在异质投资者和考虑货币政策的时两者的估计值依然在-2.5和1.5左右。

定的经济意义,如边际生产率  $a$  需大于生产资本折旧率  $\delta$ ,资本产能波动率  $\sigma$  和剩余消费比率持续性  $\rho_s$  介于  $[0, 1]$  之间等。

表1 参数估计结果

参数		点估计值	点标准差
模拟矩估计的参数			
边际生产率	$a$	0.3722	$5.0086E-16$
生产资本折旧率	$\delta$	0.1829	0.1931
生产资本产能波动率	$\sigma$	0.3886	0.0859
剩余消费比率持续性	$\rho_s$	0.7927	0.1791
固定参数			
剩余消费比率长期均值	$\bar{s}$	-2.5	
外部习惯强度	$\lambda$	1.5	
成本调整参数	$\varphi$	2.0	
时间偏好	$\rho$	0.04	
风险厌恶系数	$\gamma$	2	

## (二) 状态变量与各金融经济变量

图1展示了状态变量——剩余消费比率取不同值时,消费波动、谨慎性储蓄、资产价格、风险资产收益波动率、夏普比率和风险溢价的取值变化。状态变量分布由10000条路径,每条路径500步模拟得到。稳态变量  $s_t$  分布均值为 -1.93。

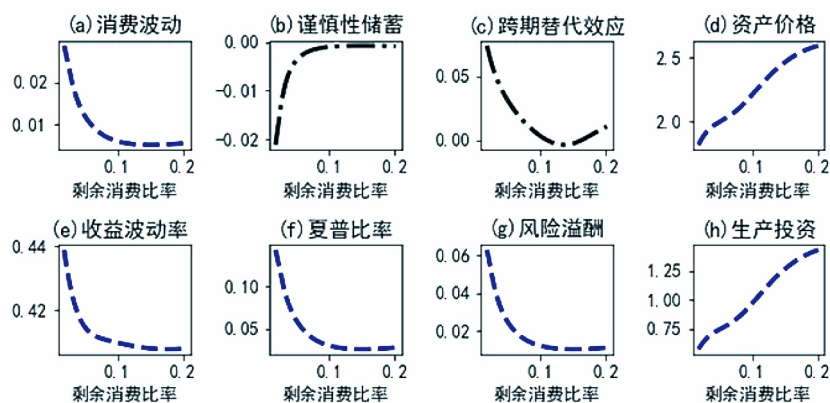


图1 不同剩余消费比率状态时各金融经济变量的取值

首先,如图1所示,消费波动率、谨慎性储蓄、资产价格及其波动率、夏普比率、风险溢价和生产投资等变量与剩余消费比率之间确实呈现出非线性关系,我们可以通过状态变量在不同时间的取值不同来刻画这些变量的时变特征,这与 Campbell 和 Cochrane<sup>[50]</sup> 的模型结论相符。其次,图1中(a)(b)显示,当剩余消费比率越低时,消费的波动越大、家庭谨慎性储蓄的绝对值越大,这与家庭消费边际倾向下降以及 Chen<sup>[51]</sup> 的结论一致。再次,图1中(b)(c)表明,谨慎性储蓄与跨期替代效应的符号相反,二者共同决定无风险利率,且整体而言,跨期替代效应大于谨慎性储蓄。复次,图1中(d)(e)(f)(g)显示,当剩余消费比率越低时,资产价格下降,风险资产收益波动率、夏普比率和风险溢价上升,表明家庭消费在剩余消费比率较低的状态时对外生冲击更敏感,此时家庭风险容忍度更低。这与已有外部习惯相关文献结论一致,说明我们构建的连续时间一般均衡模型与以往基



于禀赋的局部均衡模型一样,可以刻画风险溢价和家庭风险容忍度的时变和非线性特征。最后,图 1 中(h)显示,生产投资与剩余消费比率呈现正向关系,当剩余消费比率越小时,生产投资越小;剩余消费比率越大时,生产投资越大。此外,对比图 1 中(h)和(d)可知,生产投资与资产价格走势接近,这正如(30)式所示,生产投资主要由风险资产价格决定。

### (三) 脉冲响应分析

参照宏观经济研究的一般做法,我们进一步考察剩余消费比率面临冲击时,各变量随时间的变化。因连续时间下该宏观金融模型的稳态也是随机的,我们只知道它的概率分布,不能按宏观经济中常用的方式定义脉冲响应。借鉴 Duarte<sup>[52]</sup>的研究,本文中脉冲响应基本具体定义如下:

$$IR_{t \rightarrow T} = E \left[ \frac{V_{T, dz_t = -1} - V_{T, dz_t = 0}}{V_{T, dz_t = 0}} \right] \quad (35)$$

(35) 式中,  $dz_t$  为初始  $t$  时刻风险源的取值,  $V_t$  是变量在  $T$  的值,  $IR_{t \rightarrow T}$  即为所定义的变量  $V$  的脉冲响应。

图 2 是各经济金融变量在剩余消费比率受到 2 个标准差的负向冲击之后随时间的变化趋势。该图表明,该连续时间一般均衡模型不仅描述了资产价格一阶变量、二阶变量与状态变量的关系,还可以刻画宏观经济变量与状态变量关系,且这些关系均与经济原理和已有文献结论相符。其中图 2(a) 表明剩余消费比率遭受的负向冲击影响会随时间推移而消逝。在图 2(b)(c) 中,状态变量剩余消费比率负向冲击发生后,风险溢价和夏普比率呈现先升后降的“驼峰状”,这体现了持有风险资产面临正的系统风险,在差的状态下,风险资产投资者需要更高的风险溢价,这与 Cochrane<sup>[53]</sup>的论断相符;且它们随时间流逝而消逝,这与宏观经济中常见的脉冲响应特征一致。图 2(d) 中,剩余消费比率发生负向冲击后,无风险利率上升后逐步下降,可能是体现了跨期替代消费的结果。这正如图 1 中(b)(c) 所示,当剩余消费比率遭受负面冲击后,谨慎性储蓄和跨期替代效应的绝对值都增加,但两者对无风险利率的作用相反且跨期替代效应大于谨慎性储蓄。图 2(e)(f) 中,剩余消费比率发生负向冲击之后,风险资产收益率和消费的波动率均上升,之后变化趋于 0,表明在状态越差时,消费和风险资产收益对剩余消费比率的变化越敏感,这与边际消费倾向递减和风险资产收益的波动是正的系统性风险的经济直觉相符。图 2(g)(h) 体现了模型中剩余消费比率发生负向冲击后宏观经济变量随时间的变化,其中(g) 中的投资的负向变化会随时间趋于 0,但(h) 产出的变化会趋于一个稳定的负值。这与 Brunnermeier 和 Sannikov<sup>[54]</sup>的模型结论一致,即发生负向冲击后,经济产出并不会回到一般宏观经济模型中的确定稳态,因为在连续时间框架下,经济变量的稳态也是随机的,其概率分布由状态变量的概率分布决定<sup>[55]</sup>。这是连续时间随机模型与一般现有宏观模型最大的区别,也与金融危机后工业化国家产出持续减少的经济现实相吻合。

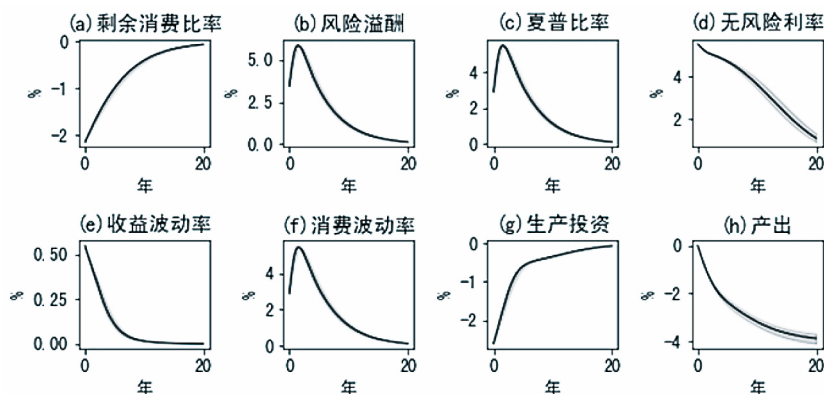


图 2 脉冲响应

注: 实线为 100000 条脉冲路径的切值, 灰色部分表示 95% 分位分布。横轴为时间, 纵轴为百分比

## 五、总结与启示

本文在外部习惯假设下,以剩余消费比率为状态变量,构建了连接资产定价与宏观模型的连续时间一般均衡模型,并利用7个相互嵌套的神经网络求解了该模型。估计结果表明,该连续时间模型除了能够刻画以往离散模型能够刻画消费波动率、风险溢价等变量与状态变量的非线性关系和时变特征之外,还能够较好地匹配冲击后资产价格变量和宏观经济变量的变化。

当然,本文中的模型只是一个非常简化的一般均衡模型,没有涉及市场主体的异质性、金融中介、货币政策等,但该文为如何利用机器学习求解宏观金融模型做了一定尝试。在此基础上,我们可以进一步构建和求解包含异质家庭消费、金融中介、货币政策的连续时间宏观金融模型。

### 注释:

- [1] Arellano, C., Bai, Y., Kehoe, P. J., “Financial Markets and Fluctuations in Volatility”, *Staff Report*, No. 466, Federal Reserve Bank of Minneapolis, 2012; Christiano, L. J., Motto, R., and Rostagno, M., “Risk shocks”, *American Economic Review*, 2014, 104(1), pp. 27–65; Gilchrist, S., Sim, J. W., Zakrajšek, E., “Uncertainty, Financial Frictions and Investment Dynamics”, *NBE Working Paper*, No. 20038, 2014; Gilchrist, S., Zakrajšek, E., “Credit Spreads and Business Cycle Fluctuations”, *The American Economic Review*, 2012, 102, pp. 1692–1720; Kyle Jurado, Sydney C. Ludvigson, Serena Ng, “Measuring Uncertainty”, *American Economic Review*, 2015, 105(3), pp. 1177–1216.
- [2] [4] [5] [53] Cochrane, J. H., “Macro-finance”, *Review of Finance*, 2017, 21(3), pp. 945–985.
- [3] 明雷、王天秩、杨胜刚 《宏观经济条件下的一个资产定价模型》,《数学的实践与认识》2015年第11期; Brunnermeier, M. K., Sannikov, Y., “A Macroeconomic Model with a Financial Sector”, *The American Economic Review*, 2014, 104, pp. 379–421; Brunnermeier, M. K., Sannikov, Y., “Macro, Money and Finance: A Continuous Time Approach”, *Handbook of Macroeconomics*, 2016, Vol. 2B, pp. 1497–1546, North-Holland, Amsterdam; He, Z., Krishnamurthy, A., “A Macroeconomic Framework for Quantifying Systemic Risk”, *Working Paper*, No. 19885, National Bureau of Economic Research, 2014; Silva H., “The Risk Channel of Unconventional Monetary Policy”, Unpublished Working paper, 2015; Tella, S. D., “Uncertainty shocks and balance sheet recessions”, *Journal of Political Economy*, 2017, 125, pp. 2038–2081; Drechsler, Itamar, Alexi Savov, and Philipp Schnabl, “A Model of Monetary Policy and Risk Premia”, *the Journal of Finance*, 2018, 73, pp. 317–373.
- [6] Mian, A., and A. Sufi, “Who Bears the Cost of Recessions? The Role of House Prices and Household Debt”, Chapter 5 in John B. Taylor and in Harald Uhlig ed., *Handbook of Macroeconomics*, 2016, Vol. 2, pp. 255–296, North-Holland, Amsterdam.
- [7] [13] [16] [17] [22] [23] [30] [33] [50] Campbell, J. Y., and Cochrane, J. H., “By force of habit: a consumption-based explanation of aggregate stock market behavior”, *Journal of Political Economy*, 1999, 2(107), pp. 205–251.
- [8] [9] [14] [18] [19] [21] [24] [31] [48] [51] Chen, Andrew Y., “External Habit in a Production Economy: A Model of Asset Prices and Consumption Volatility Risk”, *The Review of Financial Studies* 2017, 30, pp. 2890–2932.
- [10] [15] [26] [27] [28] [47] [54] Brunnermeier, M. K., Sannikov, Y., “A Macroeconomic Model with a Financial Sector”, *The American Economic Review*, 2014, 104, pp. 379–421.
- [11] Silva H., “The Risk Channel of Unconventional Monetary Policy”, Unpublished Working paper, 2015.
- [12] Tella, S. D., “Uncertainty shocks and balance sheet recessions”, *Journal of Political Economy*, 2017, 125, pp. 2038–2081.
- [20] [40] [45] [49] [52] Duarte V., “Sectoral Reallocation and Endogenous Risk-Aversion: Solving Macro-Finance Models with Machine Learning”, Unpublished Working Paper 2018.
- [25] [29] [32] [41] Brunnermeier, M. K., Sannikov, Y., “A Macroeconomic Model with a Financial Sector”, *The A-*

- merican Economic Review* ,2014 ,104 pp. 379–421; Brunnermeier , M. K. , Sannikov , Y. , “Macro , Money and Finance: A Continuous Time Approach” , *Handbook of Macroeconomics* ,2016 ,vol. 2B pp. 1497–1546 ,North–Holland Amsterdam.
- [34]Duarte V. , “Sectoral Reallocation and Endogenous Risk–Aversion: Solving Macro–Finance Models with Machine Learning” , Unpublished Working Paper ,2018; Duarte , Victor , “Machine Learning for Continuous–Time Economics” , Available at SSRN <https://ssrn.com/abstract=3012602> ,2018.
- [35]郑泽宇、梁博文、顾思宇《Tensorflow 实战 Google 深度学习框架》,北京:电子工业出版社 2018 年。
- [36][42] Brunnermeier , M. K. , Sannikov , Y. , “Macro , Money and Finance: A Continuous Time Approach” , *Handbook of Macroeconomics* ,2016 ,vol. 2B. pp. 1497 – 1546 ,North – Houand Amsterdam.
- [37]Drechsler , Itamar , Alexi Savov , and Philipp Schnabl , “A Model of Monetary Policy and Risk Premia” , *the Journal of Finance* ,2018 ,73 pp. 317–373.
- [38]Achdou , Y. , Buera , F. J. , Lasry , J.–M. , Lions , P. L. , Moll , B. , “Partial differential equation models in macroeconomics” , *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical , Physical and Engineering Sciences* ,2014 ,372.
- [39]Mnih , V. , Kavukcuoglu , K. , Silver , D. , Rusu , A. A. , Veness , J. , Bellemare , M. G. , Graves , A. , Riedmiller , M. , Fidjeland , A. K. , Ostrovski , G. , Petersen , S. , Beattie , C. , Sadik , A. , Antonoglou , I. , King , H. , Kumaran , D. , Wierstra , D. , Legg , S. , Hassabis , D. , “Human–level control through deep reinforcement learning” , *Nature* ,2015 518 pp. 529–533.
- [43]Cochrane , J. H. , “Macro–finance” , *Review of Finance* ,2017 ,21( 3) pp. 945–985; Campbell , J. Y. , and Cochrane , J. H. , “By force of habit: a consumption–based explanation of aggregate stock market behavior” , *Journal of Political Economy* ,1999 ,2( 107) pp. 205–251.
- [44]Norets . A. , “Estimation of dynamic discrete choice models using artificial neural network approximations” , *Econometric Reviews* ,2012 ,31( 1) pp. 84–106.
- [46]Duffie , D. , Singleton , K. J. , “Simulated moments estimation of markov models of asset prices” , *Econometrica* ,1993 ,61 pp. 929–952.

[责任编辑: 叶颖玫]

## Surplus Consumption Ratio , Risk Premium and Economic Fluctuation: A Continuous – time General Equilibrium Model Based on External Habit Consumption

CHEN Rong<sup>a b</sup> , BAI Lin<sup>a</sup> , ZHENG Zhen–long<sup>b</sup>

( a. School of Economics; b. School of Management , Xiamen University , Xiamen 361005 , Fujian)

**Abstract:** When the surplus consumption ratio is taken as the state variable measuring investors’ tolerance of risk , the traditional consumption–based asset pricing model can be extended to a general equilibrium model with macro variables in continuous time. Under the assumption of decrease law in marginal consumption , precautionary savings render household consumption more sensitive to shocks when the state is poor , leading to countercyclical consumption fluctuations , lower risk tolerance and higher risk premiums. The results show that the model can not only describe the non–linear relationships between consumption fluctuation , precautionary savings , risk premium and state variable , but also better match the changes over time of both asset price variables and macroeconomic variables following the negative shock of the state variable. These asset price variables and macroeconomic variables include risk premium , risk–free interest rate , Sharpe ratio , investment and economic output.

**Keywords:** surplus consumption ratio , risk premium , economic fluctuation , machine learning